

基于酉变换和稀疏贝叶斯学习的离格 DOA 估计

高阳, 陈俊丽, 杨广立

(上海大学通信与信息工程学院, 上海 200444)

摘 要: 针对传统稀疏贝叶斯学习算法(SBL)在解决低信噪比条件下信号到达角(DOA)估计有效性的问题, 提出基于酉变换的实数域稀疏贝叶斯学习(RV-OGSBL)的快速离格 DOA 估计方法。该方法首先对均匀线阵的实际接收信号通过构造增广矩阵作为 DOA 估计的处理信号, 然后利用酉变换将估计模型从复数域转化到实数域, 进一步在实数域下将离格模型与稀疏贝叶斯学习算法相结合迭代处理实现 DOA 估计, 获得较高的估计精度。仿真结果表明, RV-OGSBL 方法不仅能保持传统 SBL 算法的性能, 而且显著降低了计算复杂度。在低信噪比和低快拍数的情况下, 算法运行时间降低约 50%, 表明该方法是一种快速的 DOA 估计算法。

关键词: 到达角估计; 酉变换; 奇异值分解; 离格模型; 稀疏贝叶斯学习

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

Off-grid DOA estimation algorithm based on unitary transform and sparse Bayesian learning

GAO Yang, CHEN Jun-li, YANG Guang-li

(School of Communication Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: A rapid off-grid DOA estimating method of RV-OGSBL was raised based on unitary transformation, against the problem of traditional sparse Bayesian learning (SBL) algorithm in solving effectiveness of signal's DOA estimation under condition of lower signal noise ratio (SNR). Actual received signal of uniform linear array was generated through constructing augment matrix as the processing signal used by DOA estimation. Then, estimation model was transformed from complex value to real value by using unitary transformation. In the next step, off-grid model and sparse Bayesian learning algorithm were combined together to process the realization of DOA estimation iteratively. The accuracy of estimation could made relatively high. The simulation result demonstrates that the RV-OGSBL method not only maintains the performance of traditional SBL algorithm, but also reduces the computational complexity significantly. Under the situation of lower signal noise ratio (SNR) and low number of snapshots, the running time of algorithm is reduced about 50%. This shows the RV-OGSBL method is a rapid DOA estimation algorithm.

Key words: direction of arrival estimation, unitary transform, singular value decomposition, off-grid model, sparse Bayesian learning

1 引言

在阵列信号处理领域中, 信号到达角(DOA, direction of arrival)估计越来越引起学者们的关注。以 MUSIC^[1]和 ESPRIT^[2]算法为代表的子空间分解类算法虽然能够实现高分辨率的 DOA 估计, 但是这类算法需要在高信噪比和多快拍数的情况下才能实现较

良好的估计性能^[3]。伴随压缩感知技术的兴起, 为改善上述状况, 研究者们将稀疏表示理论应用到 DOA 估计中^[4-6], 并提出了许多性能良好的算法。其中, 最为经典的就是 L1-SVD^[7]算法。这类算法采用 L1 范数构造稀疏模型, 采用奇异值分解降低计算复杂度。该方法能够显著改善算法在低信噪比情况下的有效性。但由于求解这种凸优化问题时, 不可避免

收稿日期: 2016-07-16; 修回日期: 2017-04-23

基金项目: 上海“东方学者”专项基金资助项目 (No.B60-D107-14-201)

Foundation Item: Shanghai Easter-Scholar Professorship Award (No.B60-D107-14-201)

地会引起极高的计算复杂度，因此，该算法实用性不强。随后，研究者们提出了基于稀疏贝叶斯学习的 DOA 估计方法^[8-10]。这类方法在保持了 L1-SVD 算法的估计性能的同时也降低了算法的复杂度。但是，相比于子空间分解类算法，此类算法运行时间依然很长。在传统的 DOA 估计算法中，都是假定空间入射信号落在预先定义好的空间离散角度网格上。如果相邻网格之间间隔较大，则算法的估计精度显著降低；如果间隔较小，则算法运行时间将呈指数式增长。针对上述问题，研究者们提出了基于稀疏贝叶斯学习(SBL, sparse Bayesian learning)的离格 DOA 估计算法(OGSBL)^[11,12]。这类算法有效地解决了网格的划分问题，实现了更高的估计精度。尽管如此，这类算法依然存在算法复杂度高、运算时间长的缺点。为解决以上的各种问题，本文根据文献[13,14]中提出的酉变换的思想去改进 OGSBL^[15]算法，提出了一种用于均匀线阵的基于酉变换和稀疏贝叶斯学习的快速离格 DOA 估计方法(RV-OGSBL)。该方法将算法空间从复数域变换到实数域进行，降低了算法的运行时间。同时结合离格模型，将偏离网格的角度值作为估计参数进行迭代运算，从而保证估计的精度。仿真结果表明，本文方法在算法的运行时间方面有明显改善。

2 阵列信号模型

假设有 K 个远场的窄带信号入射到由 $M(M > K)$ 个各向同性的阵元组成的均匀直线阵列上，入射方向为 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k]$ ，阵元间距 $d = \frac{\lambda}{2}$ (λ 为入射信号波长)，在 t 时刻阵列接收到的快拍信号的表达式 $\mathbf{y}(t)$ 可以表示为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, 2, \dots, L \quad (1)$$

其中， $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)]^T$ 为入射信号的复包络； $\mathbf{n}(t)$ 是复平稳加性高斯白噪声，其均值为 0，方差为 σ^2 。 L 表示阵列采样的快拍数； θ 表示入射信号与法线之间的夹角； $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_k)] \in \mathbb{C}^{M \times K}$ ，称为阵列流型，其中， \mathbb{C} 为复数域空间，任意第 k 列向量称为阵列的导向矢量，它的具体表达式为

$$\mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{-j\phi}, \dots, e^{-j(M-1)\phi}]^T, \quad \phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin(\theta_k) \quad (2)$$

其中， $k = 1, 2, \dots, K$ 。 $[\cdot]^T$ 表示转置。本文通过处理阵列接收到的快拍信号 $\mathbf{y}(t)$ 来估计来波信号的到达角 θ 。

3 基于 off-grid 的 DOA 估计

基于传统的阵列估计模型很难提高 DOA 估计算法的总体性能。后来，研究者们为了实现更高精度的估计，引入了离格(off-grid)估计模型。对式(1)中的数学模型进行重构。

$$\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (3)$$

其中， $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(L)] \in \mathbb{C}^{M \times L}$ ， $\mathbf{N} = [\mathbf{n}(1), \mathbf{n}(2), \dots, \mathbf{n}(L)] \in \mathbb{C}^{M \times L}$ ， $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{D \times L}$ ， Φ 称为过完备字典。 Φ 的具体表达式为

$$\Phi = [\mathbf{a}(\tilde{\theta}_1), \mathbf{a}(\tilde{\theta}_2), \dots, \mathbf{a}(\tilde{\theta}_D)] \in \mathbb{C}^{M \times D} \quad (D \gg M > K) \quad (4)$$

其中， D 为完备字典 Φ 的列数， $\{\tilde{\theta}_d\}$ 是分布在 $[0, \pi]$ 上的空间角度的离散采样值。根据文献[16,17]，假定 $\tilde{\theta}_d$ 以 $r = (\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1) \propto D^{-1}$ 为间隔均匀分布，其中， \propto 表示成正比， θ_k 表示入射信号，它不属于离散角度集合，即 $\theta_k \notin \{\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_D\}$ 。记 $\tilde{\theta}_\delta$ ($\delta \in \{1, \dots, D\}$) 为入射信号与离散网格之间的偏移量，使用线性化算子去拟合导向矢量

$$\mathbf{a}(\theta_k) \approx \mathbf{a}(\tilde{\theta}_\delta) + \mathbf{b}(\tilde{\theta}_\delta)(\theta_k - \tilde{\theta}_\delta) \quad (5)$$

其中， $\mathbf{b}(\tilde{\theta}_\delta) = \mathbf{a}'(\tilde{\theta}_\delta)$ ， \mathbf{a}' 表示矩阵 \mathbf{a} 的一阶导数。记由 $\mathbf{b}(\tilde{\theta}_\delta)$ 组成的矩阵 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}(\tilde{\theta}_1), \dots, \mathbf{b}(\tilde{\theta}_D)]$ ， $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_D]^T \in \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]^D$ ，则式(5)可以写为

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\beta}) = \Phi + \mathbf{B} \text{diag}(\boldsymbol{\beta}) \quad (6)$$

将线性拟合引起的误差引入到噪声中，重构式(3)，得

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\beta})\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, \dots, L \quad (7)$$

式(7)就是基于 Off-Grid 的阵列信号估计模型，通过这种模型得到的估计值 $\boldsymbol{\beta}$ 更接近入射信号。

4 基于酉变换的 DOA 估计算法

基于 off-grid 模型实现的 DOA 估计算法中最为经典的就是 OGSBL 算法，但该方法并不是一种快速估计算法。本文在 OGSBL 算法的基础上提出了一种基于酉变换的实数化 DOA 快速估计算法。该算法首先对阵列接收信号构造增广矩阵，使其满足中心埃尔米特特性。然后利用酉变换，将复数域的矩阵信号转化到实数域。再结合奇异值分解，降低算法的计算复杂度。最后构造实数域的稀疏字典，结合稀疏贝叶斯学习实现一种快速的 DOA 估计算

法。本文提出的算法相比于传统的 OGSBL 估计算法, 通过前置的处理, 将 DOA 估计的过程完全转化到实数域进行, 显著降低了算法运行时间, 是一种改进的 OGSBL 算法。

4.1 酉变换

式(7)得到的阵列接收信号是复数域的, 传统的处理方法也都是在复数域进行。然而复数域的运算大都是实部与虚部共同参与运算, 相比于实数运算, 在快拍数和阵元数目较多的情况下, 运算量呈几何倍数增长。而酉变换能够将满足中心埃尔米特特性的复数域信号转化到实数域。在引入酉变换之前, 首先介绍酉矩阵和中心埃尔米特矩阵。

对于一个 $N \times N$ 的方阵 \mathbf{S} , 如果 \mathbf{S} 满足 $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^H$, 则称 \mathbf{S} 为酉矩阵。其中, $[\cdot]^H$ 表示共轭转置, $[\cdot]^{-1}$ 表示矩阵取逆。

对一个 $M \times N$ 的矩阵 \mathbf{G} , 如果它满足

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}_M \mathbf{G}^* \mathbf{J}_N \quad (8)$$

则称它为为中心埃尔米特矩阵。其中, \mathbf{J}_M 称为交换矩阵, 它是副对角线元素全为 1, 其他元素都为 0 的 $M \times M$ 方阵。 $[\cdot]^*$ 表示复共轭运算。

酉变换的主要原理是利用中心埃尔米特矩阵的特性^[13], 具体表达式为

$$\mathbf{G}_r = \mathbf{U}_M \mathbf{G}^* \mathbf{U}_N \quad (9)$$

其中, \mathbf{G}_r 表示经过酉变换后矩阵 \mathbf{G} 实数化的结果。 \mathbf{U}_M 为酉矩阵, 当 M 为偶数时, 有

$$\mathbf{U}_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{j}\mathbf{J}_n \\ \mathbf{J}_n & -\mathbf{j}\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

当 M 为奇数时, 有

$$\mathbf{U}_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{j}\mathbf{J}_n \\ \mathbf{0} & \sqrt{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_n & \mathbf{0} & -\mathbf{j}\mathbf{I}_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

为不失一般性, 本文假定 M 为偶数, 则 \mathbf{I} 、 \mathbf{J} 分别表示大小为 $\frac{N}{2}$ 的单位矩阵和交换矩阵。

利用中心埃尔米特矩阵的特性, 分别左乘和右乘酉矩阵就可以实现将一个复数域的矩阵变换到实数域, 同时保留入射信号的方位角信息。

4.2 奇异值分解

在 DOA 的估计过程中, 为了获得较高的估计精度, 一般会增加阵列采样快拍数。这样会使 \mathbf{Y} 矩阵维数增高, 导致算法运行时间的大幅增加。因此, 本文引入奇异值分解的方法, 对酉变换之后的接收

信号进行奇异值分解, 降低了运算维度, 节省算法运行时间。其分解表达式为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}^H \quad (12)$$

根据文献[7]将右特征矩阵 \mathbf{V} 分为 $[\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2]$ 。其中 \mathbf{V}_1 为 \mathbf{V} 的前 K 列, \mathbf{V}_2 为 \mathbf{V} 的后 $L-K$ 列。奇异值分解后包含在 \mathbf{Y} 中的特征值对应的特征向量集中在 \mathbf{V}_1 中, 因此本文取

$$\mathbf{Y}_{sv} = \mathbf{Y}\mathbf{V}_1 \in \mathbb{C}^{M \times K} \quad (13)$$

在 \mathbf{Y}_{sv} 中包含了所有入射信号的来波方向信息, 则将处理的模型变为

$$\mathbf{Y}_{sv} = \Phi \mathbf{X}_{sv} + \mathbf{N}_{sv} \quad (14)$$

其中, $\mathbf{X}_{sv} = \mathbf{X}\mathbf{V}_1$, $\mathbf{N}_{sv} = \mathbf{N}\mathbf{V}_1$ 。

4.3 RV-OGSBL 算法

本文提出的算法是一种在离格估计模型上通过酉变换实现了在实数域进行稀疏贝叶斯学习的 DOA 估计算法, 记为 RV-OGSBL (real-valued OGSBL)。

4.3.1 生成中心埃尔米特矩阵

阵列实际接收到的信号并不满足式(8), 因此, 在实现复数域到实数域的变换之前, 首先要构造一个中心埃尔米特矩阵。

根据文献[14]对矩阵 $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 可以通过构造增广矩阵 \mathbf{Y}_{aug} , 使之成为中心埃尔米特矩阵, 即

$$\mathbf{Y}_{aug} = [\mathbf{Y} | \mathbf{J}_M \mathbf{Y}^* \mathbf{J}_L] \quad (15)$$

在本文算法中, 先对阵列接收到的信号构造增广矩阵, 使之成为中心埃尔米特矩阵。然后, 利用式(9)通过酉变换得到实数域的接收信号 \mathbf{Y}_r 。

4.3.2 构造稀疏字典

稀疏贝叶斯学习算法具有较高的计算精度和较低的计算复杂度, 因此, 在 DOA 估计领域中具有非常重要的研究意义。但是这种算法对稀疏字典的依赖性比较强, 尤其是离格稀疏贝叶斯学习算法, 它需要 2 个字典。为进一步提高算法运算速度, 本文设计了一种在实数域的稀疏字典。传统的稀疏字典是在复数域, 导致整个算法运行时间加长。传统稀疏字典中的每一列是由导向矢量构成, 导向矢量的每行元素为空间角度 θ 的函数, 它的表达式为 $\mathbf{a}(\theta) = \mathbf{e}^{-j(M-i)\phi(\theta)}$, 其中, i 表示第 i 个阵元, $\phi(\theta) = \sin(-\theta)$ 。对于均匀直线阵列, 导向矢量矩阵 \mathbf{D} 满足 $\mathbf{D} = \mathbf{J}_M \mathbf{D}^*$, 说明 \mathbf{D} 矩阵满足中心埃尔米特矩阵的特性。因此, 本文可以利用式(9), 对

D 矩阵进行酉变换, 得到实数域的导向矢量, 再由导向矢量构成算法中使用的过完备稀疏字典。对于式(6)和式(7)中的稀疏字典有

$$A = [U_M \mathbf{a}(\theta_1), U_M \mathbf{a}(\theta_2), \dots, U_M \mathbf{a}(\theta_D)] \quad (16)$$

$$B = [U_M \mathbf{b}(\theta_1), U_M \mathbf{b}(\theta_2), \dots, U_M \mathbf{b}(\theta_D)] \quad (17)$$

至此, 使用酉变换将整个 DOA 估计问题转换到实数域进行, 减少了算法运行的时间。

本文算法的实施步骤如下。

- 1) 利用式(15)构造增广矩阵, 使其满足中心埃尔米特特性。
- 2) 通过酉变换将阵列接收信号从复数域变换到实数域。
- 3) 利用式(13)对经过酉变换之后实数域信号进行奇异值分解, 降低计算维度。
- 4) 为进一步降低计算复杂度, 采用式(16)和式(17)构造实数域稀疏字典。
- 5) 将以上步骤生成的数据代入到 OGSBL 算法求解 DOA 估计。

在步骤 5) 中, 迭代结束条件为算法运行到最大

迭代次数 Q 或满足条件 $\frac{\|\alpha^{i+1} - \alpha^i\|^2}{\|\alpha^i\|^2} \leq \tau$ 时算法终

止。其中, τ 为预先定义好的误差容限, α_i 表示第 i 次迭代运算的噪声方差, $\|\cdot\|^2$ 表示 l_2 范数。

本文提出的算法由酉变换、奇异值分解和稀疏重构 3 部分组成。酉变换只涉及加减运算, 其计算复杂度可以忽略不计。奇异值分解的计算复杂度为 $O(ML^2)$ 。虽然经过酉变换后, 矩阵列数 L 加倍, 奇异值分解运算时间加长, 但是整体算法的计算复杂度主要取决于需要多次迭代运算的稀疏重构部分。这部分单次迭代的 OGSBL 过程的计算复杂度为 $O(MD^2)$ 。考虑到一次复数域的乘法运算需要 4 次实数域的乘法运算, 基于此, 与直接采用复数域 OGSBL 算法相比, 本文提出的实数域算法 RV-OGSBL 在计算复杂度方面更具优势。

5 仿真分析

在实验仿真中, 均采用均匀直线阵列, 噪声为加性高斯白噪声, 仿真环境为 Matlab 2014a。本文仿真对比了 RV-OGSBI 和传统 OGSBI 算法的估计性能。其中, 最大迭代次数设置为 $Q = 2000$, 误差

容限设置为 $\tau = 10^{-3}$ 。 K 个入射信号源的 DOA 估计的均方根误差定义为

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P (\hat{\theta}_{kp} - \theta_k)^2}{KP}} \quad (18)$$

其中, P 表示蒙特卡洛实验的次数, 本文仿真部分设置其为 1000 次。 $\hat{\theta}_{kp}$ 表示第 p 次实验中第 k 个信号源的估计值。

5.1 空间分辨率

设置信噪比 $SNR = 10$ dB, 快拍数 $L = 100$, 来波方向为 $(0, 180^\circ)$ 上步长为 2° 的均匀分布。通过蒙特卡洛实验得到 RV-OGSBI 算法的估计误差 (CDF, cumulative distribution function) 曲线。由图 1 可知, 本文提出的算法在各个来波方向上均具有较高的空间分辨能力。

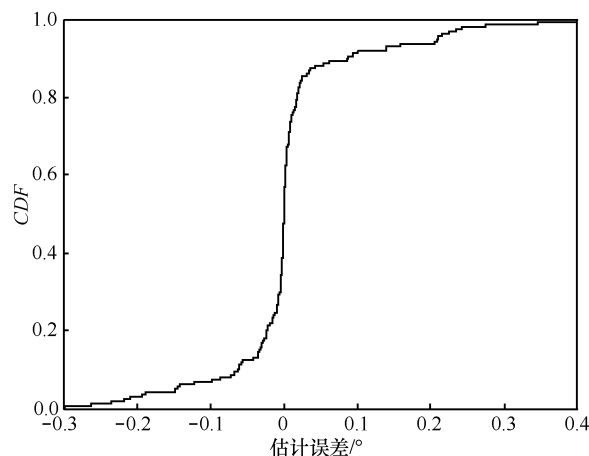


图 1 DOA 估计的误差 CDF 曲线

5.2 DOA 估计的均方根误差

设置 $SNR = 20$ dB, 阵元个数 $M = 8$ 。对比仿真 OGSBL 算法和本文提出的 RV-OGSBL 算法的有效性——均方根误差随快拍数变化的性能。由图 2 可以看出, RV-OGSBL 算法在相同快拍数下方均方根误差小于 OGSBL 算法, 这是因为本文提出的算法将原始接收信号变换成增广矩阵来处理, 从而在同样的条件下, RV-OGSBL 算法实际处理的快拍数要多于 OGSBL 算法。

5.3 算法复杂度

本文提出的 RV-OGSBL 算法, 优势在于降低算法复杂度。在仿真中, 对比 OGSBL 算法和 RV-OGSBL 算法在不同条件下的运行时间来说明本文算法的有效性。

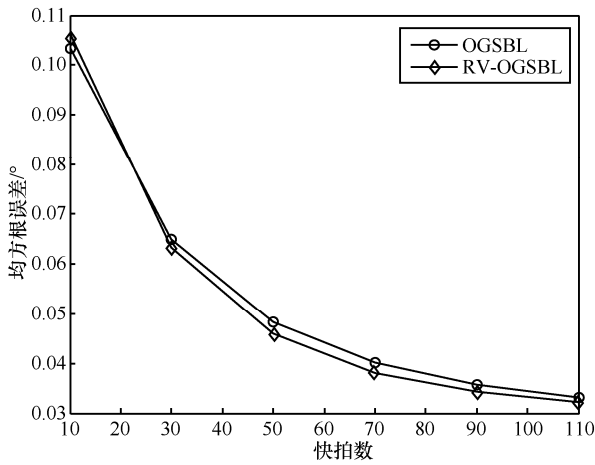


图 2 DOA 估计的均方根误差随快拍数变化曲线

图 3 是算法运行时间随信噪比变化的曲线。仿真条件为：阵列个数 $M=10$ ，快拍数 $L=100$ 。由图 3 可以看出，RV-OGSBL 算法在相同的信噪比下运行的时间低于 OGSBL 算法，尤其是在低信噪比条件下可以节省算法运行时间达到 50%。稀疏贝叶斯学习算法随着信噪比的降低，迭代次数会不断增加，使算法运行时间延长。本文提出的算法中由于扩展了快拍数，使算法收敛变快，在同样的信噪比条件下，算法迭代次数减少。因此，在相同采样快拍数条件下，RV-OGSBL 方法更具优势。

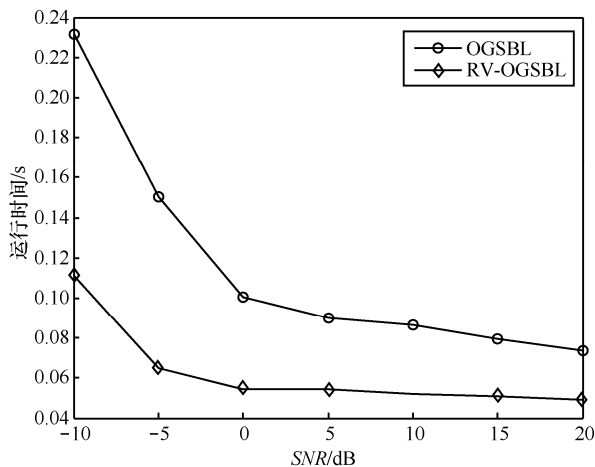


图 3 算法运行时间随信噪比变化曲线

图 4 是算法运行时间随快拍数变化的曲线。仿真条件为：阵列个数 $M=10$ ，信噪比 $SNR=15$ dB。由图 4 可以看出，RV-OGSBL 算法在较低的快拍数情况下具有更低的运行时间。随着快拍数的增加，OGSBL 算法的估计性能不断提升，算法迭代次数减少，因此，OGSBL 算法整体运行时间是降低的。然而由于 RV-OGSBL 算法扩展了快拍数，在相同仿

真条件下实际参与运算的快拍数为 OGSBL 算法的 2 倍。因此，随着快拍数的增加，RV-OGSBL 算法运行时间逐步上升。但是从总体上来看本文提出的算法运行时间相对偏低。

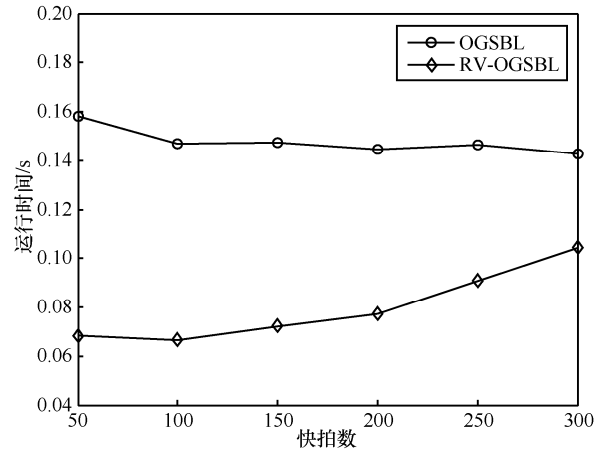


图 4 算法运行时间随快拍数变化曲线

图 5 是算法运行时间随阵列阵元个数变化曲线。仿真条件为：快拍数 $L=100$ ，信噪比 $SNR=15$ dB。由图 5 可知，在不同的阵元个数情况下，本文提出的算法相比 OGSBL 算法具有更少的运行时间，并且随着阵列尺寸的增加，这种差距越来越明显。

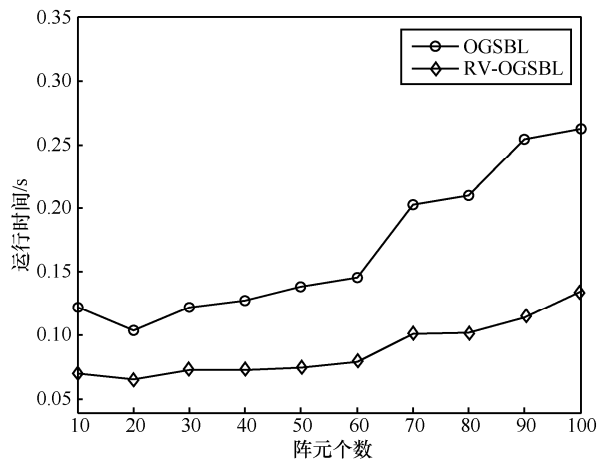


图 5 算法运行时间随阵元个数变化曲线

6 结束语

离格稀疏贝叶斯学习算法在 DOA 估计中具有非常大的优势，相比于传统算法，其在低快拍数和低信噪比条件下具有较高的精度，同时能够处理相干入射信号源的情况。但存在的问题是算法运行时间较长，不适合实际应用。本文提出的算法通过利

用酉变换,将处理模型转换到实数域进行,能够显著降低算法运行的时间,同时,通过构造增广矩阵改善了算法在低快拍数情况下的算法有效性,为实际工程应用提供了一种新思路。

参考文献:

- [1] CHAN A Y J, LITVA J. Music and maximum likelihood techniques on two-dimensional DOA estimation with uniform circular array[J]. IEEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation, 1995, 142(3): 105-114.
- [2] ROY R, KAILATH T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. IEEE Transactions on Acoustics Speech & Signal Processing, 1989, 37(7):984-995.
- [3] KRIM H, VIBERG M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4):67-94.
- [4] MALIOUTOV D, CETIN M, WILLISKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 53(8):3010-3022.
- [5] YIN J, CHEN T. Direction-of-arrival estimation using a sparse representation of array covariance vectors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(9):4489-4493.
- [6] XU D, HU N, YE Z, et al. The estimate for DOAs of signals using sparse recovery method[C]//IEEE International Conference on Acoustics. 2012:2573-2576.
- [7] SHAGHAGHI M, VOROBYOV S A. An improved L1-SVD algorithm based on noise subspace for DOA estimation [J]. Progress in Electromagnetics Research C, 2012, 29(12):109-122.
- [8] 孙磊, 王华力, 许广杰, 等. 基于稀疏贝叶斯学习的高效 DOA 估计方法[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(5):1196-1201.
SUN L, WANG H L, XU G J, et al. Efficient direction-of-arrival estimation via sparse Bayesian learning [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2013, 35(5):1196-1201.
- [9] LEI W, CHEN B. High-resolution DOA estimation for closely spaced correlated signals using unitary sparse Bayesian learning [J]. Electronics Letters, 2015, 51(3):285-287.
- [10] HUANG Q, ZHANG G, FANG Y. Real-valued DOA estimation for spherical arrays using sparse Bayesian learning [J]. Signal Processing, 2016, 125(C):79-86.
- [11] WU X, ZHU W, YAN J. Direction of arrival estimation for off-grid signals based on sparse Bayesian learning[J]. IEEE Sensors Journal, 2015, 16(7):2004-2016.
- [12] PAN Y, ZHU H, TAI N, et al. 2-D off-grid DOA estimation using sparse Bayesian learning with L-shape array[C]// IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing, 2015.
- [13] HUANG K C, YEH C C. A unitary transformation method for angle-of-arrival estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(4):975-977.
- [14] YILMAZER N, KOH J, SARKAR T K. Utilization of a unitary transform for efficient computation in the matrix pencil method to find the direction of arrival[J]. IEEE Transactions on Antennas & Propagation, 2006, 54(1): 175-181.
- [15] YANG Z, XIE L, ZHANG C. Off-grid direction of arrival estimation using sparse Bayesian inference[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 61(1):38-43.
- [16] LIANG Y, YING R, LU Z, et al. Off-grid direction of arrival estimation based on joint spatial sparsity for distributed sparse linear arrays[J]. Sensors, 2014, 14(11):21981.
- [17] ZHAO Y, ZHANG L, GU Y. Array covariance matrix-based sparse Bayesian learning for off-grid direction-of-arrival estimation [J]. Electronics Letters, 2016, 52(5):401-402.

作者简介:



高阳 (1992-), 男, 甘肃天水人, 上海大学硕士生, 主要研究方向为阵列信号处理和波达方向估计。



陈俊丽 (1972-), 女, 陕西西安人, 博士, 上海大学副教授, 主要研究方向为子波分析和智能信息处理。



杨广立 (1974-), 男, 山西晋中人, 博士, 上海大学教授, 主要研究方向为第五代通信的基站和终端的天线与射频技术、MIMO 天线和系统信道容量。